

基于非线性规划的有限元塑性极限分析下限法研究

王均星, 李 泽

(武汉大学 水资源与水电工程科学国家重点实验室, 武汉 430072)

摘 要: 在分析 Sloan 建立的有限元塑性极限分析线性规划数学模型存在的局限性基础上, 提出了基于非线性规划的有限元塑性极限分析下限法数学模型。采用非线性屈服条件构建了下限法静力容许应力场, 建立了求解超载系数、强度储备系数的下限法数学模型, 并提出了针对塑性极限分析非线性规划数学模型的求解策略; 最后对一个经典算例进行了深入分析, 验证了方法的正确性。

关 键 词: 塑性极限分析; 下限法; 非线性规划; 极限荷载; 安全系数

中图分类号: TU 313

文献标识码: A

Research on lower bound method of plastic limit analysis using finite elements based on nonlinear programming

WANG Jun-xing, LI Ze

(State Key Laboratory of Water Resources and Hydropower Engineering Science, Wuhan University, Wuhan 430072, China)

Abstract: Lower bound nonlinear programming model based on limit analysis theory is constructed through the analysis of limitation of linear programming models that are proposed by S.W.Sloan. The statically admissible stress fields for lower bound analysis are constructed by using nonlinear yield conditions; and the nonlinear programming models that can calculate overload coefficient and strength safety coefficient are established; and then the optimization strategy of nonlinear programming problem is put forward. Finally, a classic example of slope stability is given; and the results prove the correctness of the method.

Key words: plastic limit analysis; lower bound method; nonlinear programming; collapse load; factor of safety

1 概 述

塑性极限分析是一种简化的分析方法, 它避开了弹塑性分析的全过程, 直接研究结构的极限状态, 求解结构的极限荷载, 为评价结构的安全度提供必要的参数, 这是一种可靠而简便的方法, 许多学者致力于塑性极限分析数值方法的研究。最近几十年来, 采用有限元法、数学规划手段进行塑性力学的上、下限分析, 并用其来解决岩土稳定问题, 是岩土工程界研究的一个热点。

澳大利亚学者 S. W. Sloan^[1]于 1988 年将土力学下限分析法与有限元法相结合, 考虑单元之间相邻边上应力间断条件, 将理想塑性土体的平面应变下限分析归结为求解一个大规模线性规划问题; 针对所得线性规划问题的特点, Sloan^[2]提出了求线性规划的最速边界有效集合算法, 并成功地应用于地

基承载力计算, 得到了满意的结果; 1989 年 Sloan^[3]又提出有限元塑性极限分析上限法的一整套算法。至此, Sloan 的研究工作建立了一整套以塑性极限分析上、下限定理为理论基础, 以有限元、线性规划为数值分析手段的有限元塑性极限分析模式, 这标志着极限分析进入一个新的阶段, 大大推动了塑性极限分析法在岩土工程界的应用。国内外众多学者沿用 Sloan 这一模式, 做了很多有意义的研究工作^[4-6]。1997 年 Sloan 对比分析了基于线性、非线性规划算法的塑性极限分析下限法的差异^[7], 这为基于非线性规划算法的塑性极限分析理论的发展打下了坚实基础。

本文的研究工作主要基于文献[1,5,6]的研究成果, 对 Sloan 提出的有限元塑性极限分析的线性规划数学模型进行了改进。Sloan 提出的有限元塑性极限分析模式是基于线性规划模型建立的, 其中由

于屈服条件是非线性约束,为了满足线性规划模型的要求,在建模过程中不得不对非线性屈服条件进行线性化处理,这使得有限元塑性极限分析的线性规划数学模型存在以下不足:

(1) Sloan 提出的线性规划模型只适用于内摩擦角 $\varphi=0$, 或 φ 值很小的岩土体材料。这是因为: 为了将 Mohr-Coulomb 屈服函数线性化, Sloan 等考虑到线性规划的要求, 令 $X = \sigma_x - \sigma_y$, $Y = 2\tau_{xy}$, $R = 2c \cos \varphi - (\sigma_x - \sigma_y) \sin \varphi$, 将 Mohr-Coulomb 屈服条件等效成一个圆 ($X^2 + Y^2 = R^2$), 再用内接(或外切)正多边形线性化圆形屈服面, 但只有当 $\varphi=0$ 时, 圆形屈服面的半径 R 才为一常数, 即这种等效只有在 $\varphi=0$ 时才严格成立。

(2) 线性规划模型只能通过迭代法求解强度储备系数。为了避免非线性规划问题, 在求解强度储备系数时, 采用迭代方法求解, 即通过求解超载系数(重度超载或外力超载), 使它充分接近 1 来求解强度储备系数^[5]; 由于每迭代一次, 就需要重新求解数学规划模型, 因此, 对于大规模问题的计算分析, 这种方法较为费时。

(3) 线性规划模型的计算精度与用来线性化屈服圆的正多边形的边数多少有关, 边数越多, 计算精度越高, 但约束数量、计算量都将大大增加。

针对以上不足, 本文以塑性极限分析理论的下限定理为基础, 提出了基于非线性规划算法的有限元塑性极限分析方法。此方法可以避免由于屈服条件线性化产生的不足。

2 有限元塑性极限分析下限法理论

有限元塑性极限分析下限法的理论基础是塑性极限分析理论的下限定理。下限定理可以叙述为: 在所有与静力许可应力场对应的极限荷载中, 真实极限荷载最大。

由于塑性极限分析不考虑加载过程与历史, 直接研究结构的极限状态, 那么可以忽略材料的弹性性质和强化效应, 直接假定为刚塑性材料。

同时满足平衡方程、应力边界条件, 处处不违背屈服条件的应力场称为静力许可应力场。在一个受力体内, 可以构造出无数个符合上述条件的静力场; 但这些静力场不可能都是真实的应力场。荷载作用下的真实应力场只是其中的一个, 根据下限定理, 可以求得最大极限荷载对应的静力许可应力场。

为了找到下限解, 对于给定的结构, 需要构造静力许可应力场。一般的做法是: 将结构材料假定为刚塑性材料, 运用有限元离散技术将结构体划分

为若干个单元(子域), 在每个单元的内部和边界上满足平衡方程和屈服条件; 最后运用数学规划手段求解结构的极限状态。需要说明的是, 静力许可应力场可以看成若干个静力许可应力场子域的集合; 在每一个子域内, 应力是连续的, 在子域的边界之间, 应力可能不连续。

3 下限法非线性规划数学模型

有限元塑性极限分析下限法非线性规划数学模型由三部分组成: (1) 线性约束条件, (2) 非线性约束, (3) 目标函数。本文采用线性三角形单元离散结构体, 每个单元都需满足上述的约束条件与目标函数。

3.1 线性约束条件

线性约束条件包括平衡方程约束、间断面应力连续条件约束、应力边界条件约束。各约束条件的矩阵表达式如下:

平衡条件为

$$[A_{\text{equil}}^e] \sigma^e = b_{\text{equil}}^e \quad (1)$$

间断面应力连续条件为

$$[A_{\text{equil}}^d] \sigma^d = b_{\text{equil}}^d \quad (2)$$

边界条件为

$$[A_{\text{bound}}^l] \sigma^l = b_{\text{bound}}^l \quad (3)$$

上述各式的意义可参考文献[1-6], 此处不再赘述。

3.2 非线性约束

下限法中的非线性约束条件即屈服条件。对于一般受力下的岩土材料, 通常采用 Mohr-Coulomb 屈服准则。对于平面应变问题, Mohr-Coulomb 屈服条件可表示为

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (2\tau_{xy})^2 - [2c \cos \varphi - (\sigma_x + \sigma_y) \sin \varphi]^2 \leq 0 \quad (4)$$

式中: 应力以拉为正; c , φ 分别为材料的凝聚力和内摩擦角。其表达式可用下式表示:

$$f(\sigma) \leq 0 \quad (5)$$

3.3 目标函数及非线性数学规划模型

目标函数包括求解超载系数与求解强度储备系数的目标函数。

(1) 求解超载系数的非线性数学规划模型

求解超载系数时, 将超载系数设为目标函数, 则下限法数学规划模型为

$$\left. \begin{array}{l} \text{Maximum: } k_1 \\ \text{Subject to: } [A_1]X = B_1 \\ f(\sigma) \leq 0 \end{array} \right\} \quad (6)$$

式中: k_1 为超载系数 (重度超载、外力超载); 求重度超载系数时, 令 $\gamma_1 = k_1 \gamma$, 将其代入平衡方程即可; 求解极限荷载时, 令 $p_1 = k_1 p$ (p 为单位外荷载), 将其代入边界约束条件即可。 $[A_1] = \sum_{e=1}^E [A_{\text{equil}}^e] + \sum_{d=1}^D [A_{\text{equil}}^d] + \sum_{l=1}^L [A_{\text{bound}}^l]$ 为总体等式线性约束矩阵, 它由每个单元的平衡约束矩阵、应力间断面连续条件约束矩阵、应力边界条件约束矩阵集成; $f(\sigma) \leq 0$ 为由屈服条件产生的非线性约束; $B_1 = \sum_{e=1}^E b_{\text{equil}}^e + \sum_{d=1}^D b_{\text{equil}}^d + \sum_{l=1}^L b_{\text{bound}}^l$ 为右端项; E 为单元总数; D 为各单元公共边总数; L 为单元边界边总数。

(2) 求解强度储备系数的非线性数学规划模型
当采用强度储备系数来定义安全系数时, 即

$$k_2 = \tan \varphi / \tan \varphi' = c / c' \quad (7)$$

式中: c', φ' 为进行强度折减以后的强度参数。

$$\text{由于 } \sin \varphi' = \frac{\tan \varphi'}{\sqrt{1 + \tan^2 \varphi'}}, \cos \varphi' = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \varphi'}},$$

将其代入式 (7) 和式 (4) 中可得到包含有强度储备系数 k_2 的 Mohr-Coulomb 屈服条件表达式:

$$F = (\sigma_x - \sigma_y)^2 + (2\tau_{xy})^2 - [2c \frac{1}{\sqrt{k_2^2 + \tan^2 \varphi}} - (\sigma_x + \sigma_y) \frac{\tan \varphi}{\sqrt{k_2^2 + \tan^2 \varphi}}]^2 \leq 0 \quad (8)$$

简写为

$$f'(\sigma) \leq 0 \quad (9)$$

将强度储备系数设为目标函数, 则下限法数学规划模型为

$$\left. \begin{array}{l} \text{Maximum: } k_2 \\ \text{Subject to: } [A_1']X = B_1' \\ f'(\sigma) \leq 0 \end{array} \right\} \quad (10)$$

式 (10) 中各符号意义与式 (6) 类似。

4 下限法非线性规划模型的求解策略

上述塑性极限分析下限法数学规划模型是一个非线性规划问题。一般来说, 非线性规划问题比线性规划求解起来要困难得多, 因此, 有必要寻求一个高效率、稳定的非线性规划求解器。目前国际市场上的专业优化软件以及包括优化功能的数学软件众多, 本文选用了著名 Lingo 系统公司的专业优化软件 Lingo8.0 来实现非线性规划的求解。Lingo8.0 功能强大、计算效果比较好, 与其他优化软件相比, 其在求解非线性规划问题方面有其独到

之处, 它内置多种算法, 可以根据非线性规划问题的特点、规模运用相应的算法求解^[8]。本文编写了 Fortran 与 Lingo 之间的交换数据的子程序, 可以简单方便地实现 Fortran 主体程序与 Lingo 之间的数据交换。

5 程序编制与算例

5.1 程序编制

根据上述推导的数学模型, 本文采用 Fortran9.0 编写了基于非线性规划的有限元塑性极限分析下限法程序 NLPLBPLA.FOR, 程序框图如图 1 所示。程序具有如下功能: (1) 计算重度超载系数; (2) 计算外力超载系数; (3) 计算强度储备系数; (4) 生成相应极限状态下的应力场。

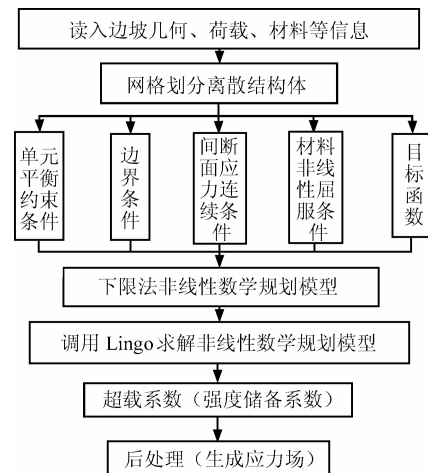


图 1 下限法程序框图

Fig.1 Flow chart of lower bound method

5.2 算例

本文选取了一个经典土质边坡进行了分析计算。图 2 所示为一均质土坡, 坡比为 1:2, 土体的参数: $\gamma = 18.0 \text{ kN/m}^3$, $c = c_u = 30 \text{ kPa}$, $\varphi = 0^\circ$ 。

由于土坡的对称性, 计算时仅取一半计算。下限法的网格划分如图 3 所示, 为了验证方法与程序的正确性, 本文计算了不同条件下坡体的极限荷载、安全系数, 并将非线性 NLP 模型的计算结果与下解析解、经典方法的解以及采用线性规划 LP 模型^[1,6]计算得到的解进行了比较。

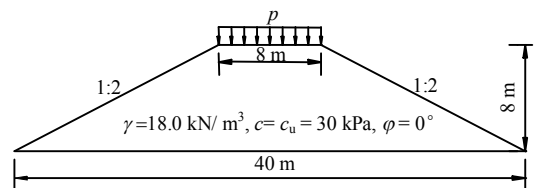


图 2 均质土坡计算示意图

Fig.2 Sketch of a simple homogeneous slope

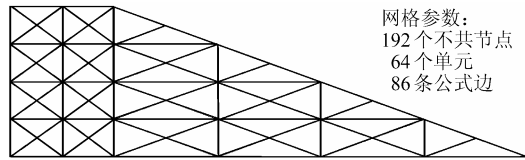


图3 网格划分

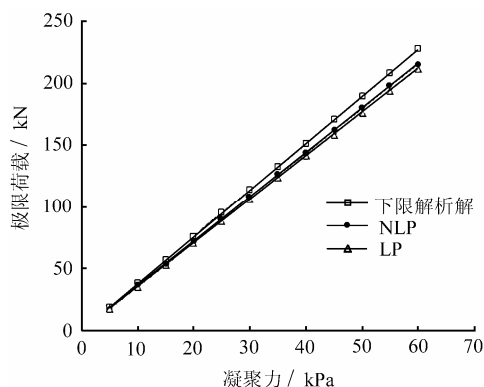
Fig.3 Grid of homogeneous slope

(1) 无重度不排水极限荷载

当坡顶作用均布荷载, 在 $\gamma = 0$, $\varphi = 0^\circ$ 的条件下, 均质土坡坡顶极限荷载的下限解析解为^[9]: $P^{\text{下}} = 2c(1 + \sin \alpha)$, 其中 α 为斜坡面与 y 轴的夹角。各种方法的计算结果列于表 1, 绘成图形如图 4 所示。由理论解析解表达式可知, 当 $\gamma = 0$, $\varphi = 0^\circ$ 时, 极限荷载与 c 值变化是线性关系, 从计算结果可以看出, 由非线性规划模型、线性规划模型的计算结果都反映了此特点, 并且与解析解的误差都在 8% 以内, 但非线性规划的计算精度高于线性规划的计算精度。

表 1 极限荷载随 c 值变化计算结果 ($\gamma = 0$, $\varphi = 0^\circ$)Table 1 Results of Effect of c on bearing capacity

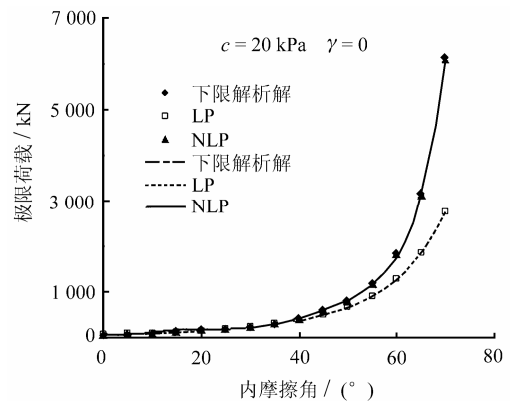
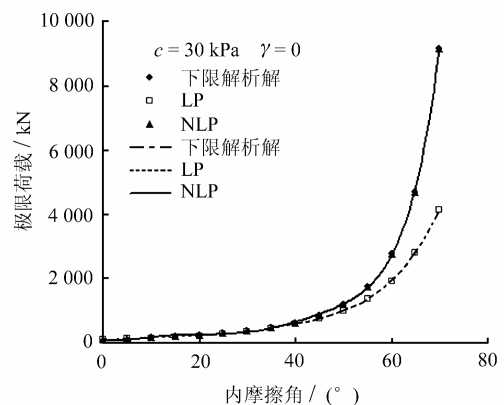
凝聚力 c/kPa	下限解 析解 P/kN	NLP 下限法		LP 下限法	
		P/kN	相对下限 解误差/%	P/kN	相对下限 解误差/%
5	18.944	17.988 9	5.309 3	17.668 1	7.221 5
10	37.889	35.977 8	5.312 0	35.336 3	7.224 0
15	56.833	53.966 8	5.311 1	53.000 4	7.231 3
20	75.777	71.955 7	5.310 6	70.667 2	7.230 8
25	94.721	89.944 6	5.310 4	88.334 1	7.230 4
30	113.666	107.93 4	5.311 1	106.000 9	7.231 2
35	132.610	125.92 2	5.310 8	123.667 7	7.230 9
40	151.554	143.911 4	5.310 6	141.334 5	7.230 7
45	170.498	161.900 3	5.310 5	159.001 3	7.230 6
50	189.443	179.889 2	5.310 9	176.668 1	7.231 0
55	208.387	197.878 1	5.310 8	194.334 9	7.230 9
60	227.331	215.867 1	5.310 6	212.001 7	7.230 7

图 4 极限荷载随凝聚力变化关系图 ($\gamma = 0$, $\varphi = 0^\circ$)Fig.4 Effect of c on bearing capacity ($\gamma = 0$, $\varphi = 0^\circ$)(2) 排水条件下的极限荷载 ($\varphi \neq 0^\circ$)

当坡顶作用均布荷载, $\gamma = 0$, $\varphi \neq 0^\circ$ 的条件下, 均质土坡坡顶极限荷载的下限解析解为^[9]: $P^{\text{下}} =$

$$ccot\varphi \left[\tan^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \frac{\sin 2\psi}{\sin 2\delta} - 1 \right].$$

计算结果见图 5、图 6 及表 2 所示。从计算结果可知, 非线性规划模型的计算结果与理论解析解非常接近, 在图 5 和图 6 中非线性规划模型计算结果的拟合曲线与解析解的拟合曲线几乎重合; 而线性规划模型的计算结果表现为: 当 $\varphi < 35^\circ$ 时, 与理论解析解误差较小; 而当 $\varphi > 35^\circ$ 时, 随着 φ 的增大, 其计算结果与理论解析解相差越来越大, 产生这种误差的原因是: 线性规划数学模型中屈服条件的线性化处理, 使其仅适用于 $\varphi = 0^\circ$ 或 φ 很小的岩土材料; 而非线性规划数学模型则无此局限性。

图 5 极限荷载随摩擦角变化关系图 ($\gamma = 0$, $c = 20 \text{ kPa}$)Fig.5 Effect of φ on bearing capacity ($\gamma = 0$, $c = 20 \text{ kPa}$)图 6 极限荷载随摩擦角变化关系图 ($\gamma = 0$, $c = 30 \text{ kPa}$)Fig.6 Effect of φ on bearing capacity

($\gamma = 0$, $c = 30 \text{ kPa}$)

(3) 极限荷载随重度的变化

当坡顶作用均布荷载, 土体重度不为 0 时, 极限荷载不存在理论解。本文分别计算了在 ($c = 20 \text{ kPa}$, $\varphi = 0^\circ$ 和 $c = 30 \text{ kPa}$, $\varphi = 0^\circ$ 条件下, 均布

荷载的极限值与重度的变化关系；表 3 和图 7 反映了极限荷载随重度的变化情况，即极限荷载随着重度增加而逐渐减小。从图 7 中可以看出，当重度小于 5 kN/m³ 时，极限荷载随重度增大而减小的速率

比较小；而当重度大于 5 kN/m³ 时，极限荷载随重度增大而减小的速率变大，而且近似于线性变化。对于不同的 c 值，线性变化的速率近乎相同，这与实际变化规律相似。

表 2 极限荷载随摩擦角变化关系计算结果($\gamma=0$)
Table 2 Results of effect of φ on bearing capacity

内摩擦角 /(°)	极限荷载 P/kN									
	$c = 20 \text{ kPa}, \gamma = 0$					$c = 30 \text{ kPa}, \gamma = 0$				
	下限 解析解	NLP 下限法		LP 下限法		下限 解析解	NLP 下限法		LP 下限法	
		计算结果	误差/%	计算结果	误差/%		计算结果	误差/%	计算结果	误差/%
0	75.777	71.955 7	5.310 6	70.6672 4	7.230 7	113.666 7	107.933 5	5.314 8	106.000 9	7.234 9
5	89.727 5	86.594 3	3.618 3	85.6526 3	4.757 4	134.588 5	129.891 4	3.616 2	128.478 9	4.755 3
10	107.125 4	104.599 9	2.414 4	101.087 9	5.972 5	160.688 1	156.899 8	2.414 5	151.631 8	5.972 6
15	129.175 8	127.179 8	1.569 4	120.804	6.930 1	193.763 7	190.769 8	1.569 4	181.205 9	6.930 1
20	157.621 9	156.082 5	0.986 3	146.609	7.511 7	236.432 9	234.123 7	0.986 3	219.913 5	7.511 8
25	195.064 2	193.914 8	0.592 7	181.353 3	7.560 3	292.596 3	290.872 2	0.592 7	272.030 0	7.560 3
30	245.504 9	244.673 6	0.339 8	229.769 1	6.848 5	368.257 4	367.010 3	0.339 8	344.653 7	6.848 5
35	315.304 1	314.727 3	0.183 3	300.176 2	5.039 7	472.956 1	472.090 9	0.183 3	450.264 4	5.039 6
40	414.987 6	414.591 7	0.095 5	381.834 3	8.682 6	622.481 4	621.887 6	0.095 5	572.751 6	8.682 6
45	562.841 7	562.553 5	0.051 2	495.630 5	13.560 7	844.262 6	843.830 3	0.051 2	743.445 7	13.560 8
50	792.496 9	792.170 9	0.041 2	659.828 2	20.106 6	1 188.745 3	1188.257 0	0.041 1	989.742 2	20.106 6
55	1 170.380 3	1 169.922	0.039 2	903.768 4	29.500 0	1 755.570 4	1754.880 2	0.039 2	1 355.653	29.500 0
60	1 840.081 2	1 839.419	0.036 0	1 276.656	44.132 9	2 760.121 8	2759.129 0	0.036 0	1 914.983	44.133 0
65	3 151.261 4	3 149.824	0.045 6	1 858.843	69.528 1	4 726.892 1	4724.737 0	0.045 6	2 788.264	69.528 1
70	6 107.741 6	6 103.413	0.070 9	2 764.293	120.951	9 161.612 4	9 155.117 0	0.0709	4146.442	120.95 1

表 3 极限荷载随重度变化关系计算结果($\varphi=0^\circ$)
Table 3 Results of Effect of γ on bearing capacity

重度 / $\text{kN} \cdot \text{m}^{-3}$	极限荷载 P/kN			
	$c = 30 \text{ kPa}, \varphi = 0^\circ$		$c = 20 \text{ kPa}, \varphi = 0^\circ$	
	NLP 下限法	LP 下限法	NLP 下限法	LP 下限法
0	107.933 5	106.000 9	71.955 7	70.667 2
2	107.912 6	105.975 2	71.902 8	70.635 3
4	107.904 0	105.633 4	71.842 3	70.605 6
6	107.891 2	105.399	65.220 8	63.314 5
8	101.719 9	98.788 4	56.870 5	54.969 4
10	93.798 8	90.962 4	47.950 0	46.066 5
12	85.305 8	82.454 1	38.435 5	36.483 0
14	76.446 1	73.618 5	28.466 4	26.533 6
16	67.277 8	64.376 2	18.202 1	16.220 5
18	57.653 2	54.724 5	7.396 9	4.919 8
20	47.738 8	44.823 7	/	/
22	37.621 2	34.753 0	/	/
24	27.303 2	24.330 8	/	/
26	16.603 7	13.224 1	/	/
28	5.387 7	1.437 8	/	/

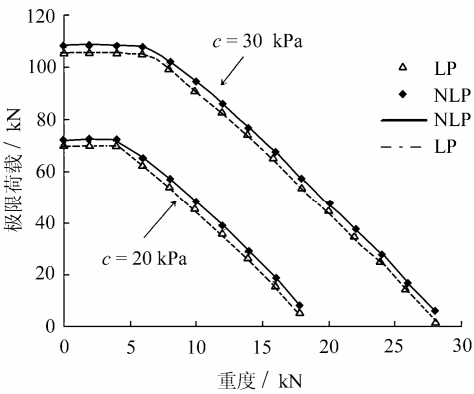


图 7 极限荷载随重度变化关系图($\varphi=0^\circ$)
Fig.7 Effect of γ on bearing capacity ($\varphi=0^\circ$)

(4) 土坡在自然状态下的稳定安全系数

如表 4 所示，在 $\gamma=18 \text{ kN/m}^3$ ，且 $c=30 \text{ kPa}$ 的自然状态下的边坡稳定安全系数随 φ 值变化的计算结果，其中简化 Bishop 法安全系数是按圆弧滑动面计算得到的^[10]；由图 8 可知，基于本文下限法得到的安全系数与 Bishop 法得到的安全系数比较接近，且变化规律相同。图 9、图 10 为 $\gamma=18 \text{ kN/m}^3$ ， $c=30 \text{ kPa}$ ， $\varphi=0^\circ$ 条件下，计算得到的极限状态应力场，其应力分布符合一般规律。

表4 稳定安全系数随 φ 值变化计算结果
($\gamma=18 \text{ kN/m}^3$, $c=30 \text{ kPa}$)

Table 4 Results of Effect of φ on factor of safety

内摩擦角 / $^\circ$	安全系数		内摩擦角 / $^\circ$	安全系数	
	NLP 下限法	Bishop 法		NLP 下限法	Bishop 法
0	1.606	1.710	40	3.967	4.113
5	1.896	1.979	45	4.369	4.452
10	2.163	2.234	50	4.841	4.996
15	2.431	2.497	55	5.411	5.531
20	2.704	2.768	60	6.125	6.262
25	2.990	3.074	65	7.053	7.252
30	3.290	3.368	70	8.312	8.664
35	3.612	3.680	/	/	/

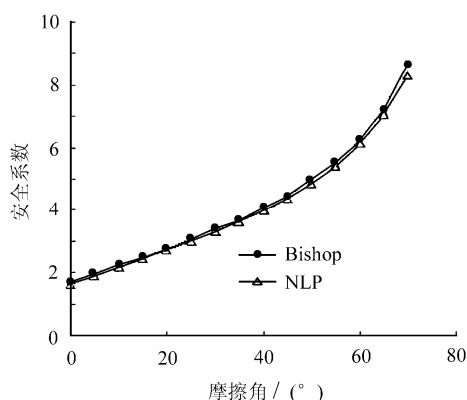


图8 安全系数随摩擦角变化关系图($\gamma=18 \text{ kN/m}^3$, $c=30 \text{ kPa}$)
Fig.8 Effect of φ on factor of safty ($\gamma=18 \text{ kN/m}^3$, $c=30 \text{ kPa}$)

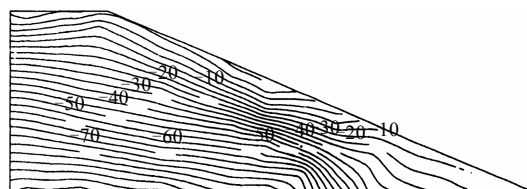


图9 第一主应力等值线 (单位: kPa)
Fig.9 Contours of first principal stress (unit: kPa)

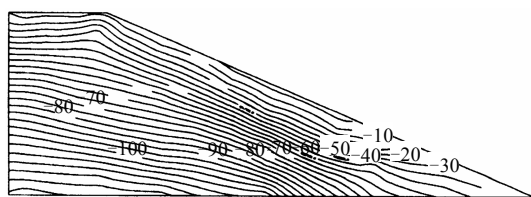


图10 第二主应力等值线(单位: kPa)
Fig.10 Contours of second principal stress (unit: kPa)

6 结 论

(1) 本文提出的基于非线性规划的有限元塑性极限分析下限法具有严密的理论基础, 并且数值方法可行, 其数学模型求解结果精度相当高, 因此, 此法有可能成为边坡承载能力分析的最有效方法之一。

(2) 对于 $\varphi=0^\circ$ 的土体材料, 非线性规划数学模型与线性规划数学模型的计算误差都较小, 但

对于 $\varphi>0^\circ$ 的岩土体材料(特别是 $\varphi>35^\circ$ 时), 塑性极限分析线性规划数学模型由于在理论上存在缺陷, 其计算误差比较大。本文提出的下限法非线性规划数学模型可以弥补这一缺陷, 这对于塑性极限分析法在岩土工程的应用有一定的理论价值。

(3) 经计算证明, 本文提出有限元的塑性极限分析优化方法较为可行, Lingo 可成为有限元塑性极限分析优化的可靠求解器, 可以有效地保证求解精度。在计算过程中发现, 下限解的精度与单元划分有很大关系, 稀疏的单元构建的静力容许应力场与真实静力容许应力场误差较大; 而过密的单元则会产生众多的节点变量, 大大增加非线性约束的数量, 降低求解效率。经过试算发现, 单元划分数在40~300个为宜。

参 考 文 献

- [1] SLOAN S W. Lower bound limit analysis using finite element and linear programming [J]. *International journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 1988, 12: 61—77.
- [2] SLOAN S W. A steepest edge active set algorithm for solving sparse linear programming problems [J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1988, 26: 2 671—2 685.
- [3] SLOAN S W. Upper bound limit analysis using finite element and linear programming [J]. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 1989, 13: 263—282.
- [4] JONGMIN KIM, RODRIGO SALGADO. Stability analysis of complex soil slopes using limit analysis[J]. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, 2002, 128(7): 546—557.
- [5] 李国英, 沈珠江. 下限原理有限单元法及其在土工问题中的运用[J]. *岩土工程学报*, 1997, 19(5): 84—89.
LI Guo-ying, SHEN Zhu-jiang. Lower bound limit analysis using finit element and its application in soil mechanics[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 1997, 19(5): 84—89.
- [6] 王汉辉, 王均星, 王开治. 边坡稳定的有限元塑性极限分析[J]. *岩土力学*, 2003, 10, 24(5): 732—738.
WANG Han-hui, WANG Jun-xing, WANG Kai-zhi. Plastic limit analysis of slope stability using finite element[J]. *Rock and Soil Mechanics*. 2003, 10, 24(5): 732—738.
- [7] LYAMIN A V, SLOAN S W A comparison of linear and nonlinear programming formulations for lower bound limit analysis[C]// Proc. 6th International. Symposium on Numerical Models in Geomechanics. Rotterdam: Balkema A A, 367—373.
- [8] SCHARGE L. Optimization modeling with LINGO[M]. Chicago: LINGO System Inc., 2004.
- [9] 张学言. 岩土塑性力学[M]. 天津: 人民交通出版社, 1993.
- [10] 陈祖煜. 土质边坡稳定分析原理. 方法. 程序[M]. 北京: 中国水利水电出版社, 2003.